"فصل اول"

تعبیر فیزیکی مشتق

مشتق میزان تغییر است

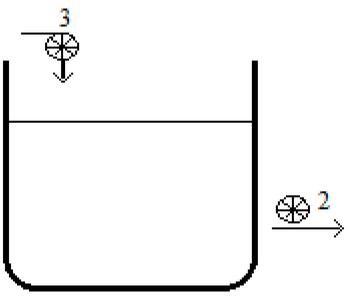
$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$y = (y.x)$$

عبارت $y' = \frac{dy}{dx}$ عبارت است از میزان تغییر در y به ازای واحد تغییر در x

مثال) در مخزن V برد با حجم $\frac{dv}{dt}$ متر مکعب آب با سرعت ۳ متر مکعب در دقیقه وارد و با سرعت ۲ متر مکعب در دقیقه خارج میشود.

چند دقیقه زمان لازم است تا مخزن پر شود؟



V = حجم مخزن آب

V= V(t)

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = 3 - 2 \\ V(0) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{dv}{dt} = 1$$

$$V = t + c$$

$$t = 0 .\ \ v = 0$$

$0 = 0 + C => C = 0$

$V = t$

$1000 = t$

معادله دیفرانسیل معمولی

عبارتی بصورت $G(x. y. y'. y''. .... y^{(n)}) = 0$ را معادله دیفرانسیل معمولی مینامند بزرگترین مرتبه مشتق موجود در معادله را مرتبه معادله مینامند

1) $y' + xy = x^3$

معادله دیفرانسیل مرتبه اول

2) $x^2y'' + xy' + 5y = x^5$

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

3) $y''' + 5y'' + 4y' + 7y = x^4$

معادله دیفرانسیل مرتبه سوم

جواب عمومی معادله مرتبه n- ام

تابع $y = \emptyset(x. c_1. c_2. .... c_n)$ را جواب عمومی $G(xy. y'. y''. y'''. .... y^{(n)}) = 0$ در بازه $(a. b)$ نامند.

در صورتیکه در معادله $G(xy. y'. y''. y'''. .... y^{(n)}) = 0$ صدق کند.

مثال) $y = Ce^{3x}$ جواب عمومی $y' - 3y = 0$ میباشد؟

$y' = 3Ce^{3x}$
$3Ce^{3x} - 3Ce^{3x} = 0$

مثال) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$ جواب عمومی $y'' - 5y' + 6y = 0$ میباشد؟

1. $y = 2c_1e^{2x} + 3c_2e^{3x}$
$2ce^{2x} - 2ce^{2x} - 3ce^{3x} - 3ce^{3x}$

$2ce^{2x} - 2ce^{2x} - 3ce^{3x} - 3ce^{3x} = 0$

2. $y'' = 4c_1e^{2x} + 9c_2e^{3x}$

3. $4c_1e^{2x} + 9c_2e^{3x} - 5(2c_1e^{2x} + 3c_1e^{3x}) + 6(c_1e^{2x} + c_2e^{3x}) = 0$

جواب خصوصی

با تبدیل پارامترهای $c_1. c_2. \dots . c_n$ در جواب عمومی به اعداد مشخص جواب خصوصی بدست میآید.

مثال) $y_1 = 7e^{2x}$ و $y_2 = 10e^{3x}$ جوابهای خصوصی $y' - 3y = 0$ میباشند؟

$$y_1 = 5e^{2x} + 9e^{3x} \,..\; y_2 = 7e^{2x} + 11e^{3x} \rightarrow y'' - 5y' + 6y = 0\surd$$

معادله دیفرانسیل مرتبه اول

۱) معادله دیفرانسیل جداشدنی (تفکیک پذیر)

معادله $G(x.y.y') = 0$ را جداشدنی نامند در صورتی که بتوان بشکل زیر عمل کرد.

$$f(x)5dx = g(y)dy$$
$$\int f(x)dx = \int g(y)dy + c$$

مثال) معادله زیر را حل کنید

$$y' - x^2y^3 = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = x^2y^3$$
$$\frac{dy}{y^3} = x^2dx$$
$$\int \frac{dy}{y^3} = \int x^3dx + C$$
$$\int y^{-3}dy - \int x^2dx + C$$
$$\frac{y^{-2}}{-2} = \frac{x^3}{3} + C$$

$$y' = \frac{\sin x}{\cos y}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\cos y}$$
$$\cos y\, dy = \sin x\, dx$$

$$\int \cos y\, dy = \int \sin x\, dx$$
$$\sin y = -\cos x + C$$
$$y' = \frac{\cos y}{1+x^2}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos y}{1+x^2}$$
$$\frac{dy}{\cos y} = \frac{dx}{1+x^2}$$
$$\int \frac{dy}{\cos y} = \int \frac{dx}{1+x^2} + C$$
$$\ln\left|\frac{1}{\cos y} + \tan y\right| = avc\ \ \tan x + C$$

۲) معادله خطی مرتبه اول

معادله ای به فرم $y' + P(x)y = Q(x)$ را خطی مرتبه اول مینامند

مثال)

$$y' - xy = 2x$$
$$y' + 3y = x^3$$

فرمول مشتق حاصل ضرب $(uv') = u'v + uv'$

عامل انتگرال ساز $\mu = e^{\int e(x)dx}$ با ضرب تابع μ در معادله $y' + P(x)y = Q(x)$ معادل جدید دیفرانسیل کامل میشود

$$\frac{du}{u} = \ln y$$
$$\propto \ln x = \ln x$$
$$e^{\ln x} = x$$
$$\ln e^x = x$$

مثال)

$$y' + \frac{1}{x}y = x^2$$
$$\int P(x)dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln x$$
$$\mu = e^{\int P(x)dx} = e^{\ln x} = n$$

$$xy' + 1y = x^3$$
$$(xy)' = x^3$$
$$\int (xy)'dx = \int x^3 dx + C$$
$$xy = \frac{x^3}{4} + C$$

$$y' + \frac{2}{x}y = 3x$$
$$\int P(x)dx = \int \frac{2}{x}dx = 2\ln x = \ln x^2$$
$$\mu = e^{\int P(x)dx} = e^{\ln x^2} = x^2$$
$$x^2y' + 2xy = 3x^3 \qquad x^2y = \tfrac{3}{4}x^3 + C$$
$$(x^2y)' = 3x^3 \qquad y = \tfrac{3}{4}x^2 + \tfrac{c}{x^2}$$
$$x^2y = \int 3x^3dx + C$$

$$\int \frac{du}{u}\ln u$$

$$y' - (\tan x)y = 1$$
$$\mu e^{\int P(x)dx} = e^{\int -\tan x dx}$$
$$\mu e^{\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx} = e^{\ln\cos x} = \cos x$$
$$(\cos x)y' + (-\sin x)y = \cos x$$
$$((\cos x)y)' = \cos x$$
$$(\cos x)y = \int \cos x\, dx + C \rightarrow (\cos x)y = \sin x + C$$

۳) معادله کامل

فرم دیفرانسیل $M(x.y)dx + N(x.y)dy = 0$ اگر $\emptyset(x.y)$ تابعی دو متغیره باشد دیفرانسیل کامل $d\emptyset = \frac{\partial\emptyset}{\partial x}dx + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}dy$ معادله $Mdx + Ndx = 0$ را کامل نامند در صورتی که تابعی مانند $\emptyset(x.y) = c$ موجود باشد به طوری که $d\emptyset = M(x.y)dx + N(x.y)dy = 0$ بنابراین $\emptyset(x.y) = c$ جواب عمومی است. قضیه بالا کامل است اگر فقط اگر $\frac{\emptyset M}{\emptyset y} = \frac{\emptyset N}{\emptyset x}$.

جواب عمومی معادله $\emptyset$

$$\emptyset(x.y) = \int M(x.y')dx + \int N(x.y)dy - C$$

مثال)

$$\frac{\emptyset M}{\emptyset y} = 3xy + e^M \quad . \quad \frac{\emptyset N}{\emptyset x} = 2xye^N$$

$$\begin{cases} \int Mdx = \int (2xy^2 + ye^M + 3)Nx + x^2y^3 + ye^M + 2x \\ \int Ndy = \int (2x^2y + e^M + 3)dy + x^3y^2 + ye^M + 2y \end{cases}$$

$$\emptyset(x.y) = x^2y^2 + ye^M + 3x + 2y + C$$

$$(y\cos x + \sin y + y)dx + (\sin x + x\cos y + x)dy = 0$$

$$\frac{\emptyset M}{\emptyset y} = \cos x + \sin y + 1 \quad . \quad \frac{\emptyset N}{\emptyset x} = \sin x + \cos y + 1$$

$$\begin{cases} \int Mdx = \int (y\cos x + \sin y + y)dx + y\sin x + x\sin y + xy \\ \int Ndy = \int (\sin x + x\cos y + x)dy = y\sin x + x\sin y + xy \end{cases}$$

۴) معادله برنولی

$$y' + P(x)y = \emptyset(x)y^{\propto}$$

$$y^{-\propto}y' + Pxy^{1-\propto} = \emptyset(x) \qquad Z = y^{1-\propto}$$

$$Z' = (1-\propto)y' \qquad y^{-\propto} \to Z' = y'y^{-\propto}$$

$Z' = P(x)Z = Q(x)$ خطی مرتبه اول

مثال)

$$y' + y = xy^2$$

$$y^{-2}y' + y^{-1} = x$$

$$Z - y^{-1} \to Z' = -y^{-2}y' \to y^{-2}y' = -Z$$

$$-Z' + Z = x$$

$Z' - Z = -x$ خطی

$$\int P(x)dx$$

$$\mu = e'$$

$$\int P(x)dx = \int -1dx = -x$$

$$\mu = e^{-x}$$

$$e^{-x}z' - e^{-x}z = -xe^{-x}$$

$$(e^{-x}z)' = -xe^{-x}$$

$$e^{-x}z = -\int \frac{x}{u} ed + C$$
$$e^{-x}z = -(-xe^{-x} - e^{-x}) + c$$
$$\frac{1}{y} = -(-x-1) + ce^{x}$$
$$\frac{1}{y} = x + 1 + ce^{x}$$ جواب عمومی

معادله انتگرال مرتبه اول

کامل انتگرال ساز

اگر $M_y \neq N_x$ تابع $M(x.y)$ را کامل انتگرال ساز نامند در صورتی که

$\mu(x.y)M(x.y)dx + \mu(x.y)N(x.y)dy = 0$ کامل باشد.

۱) **حالت خاص:** اگر $h = \frac{My-Nk}{N}$ معادله عامل انتگرال سازی بصورت $\mu = \mu(x)$ دارد که از معادله زیر بدست میاید. $\frac{d\mu}{\mu} = \frac{My-Nx}{N}dx$

مثال)

$$\begin{pmatrix}3xy^2 + 2y\\ M\end{pmatrix}dx + \begin{pmatrix}2x^2y + x\\ N\end{pmatrix}dx = 0$$
$$My = 6xy + 2 \quad . \quad Nx = 4xy + 1$$
$$\frac{My - Nx}{N} = \frac{6xy + 2 - 3xy + 1}{2x^2y + 1} = \frac{2xy + 1}{x(2xy + 1)} = \frac{1}{x}$$
$$(3x^2y^2 + 2xy)dx + (2x^3y + x^2)dy = 0$$
$$\int (2x^3y + 2x)dx = x^3y^2 + 4x^2y$$
$$\int (2x^3y + x^2) = x^3y^2 + x^2y \to x^3y^2 + x^2y = C$$

۲) اگر $\frac{My-Nx}{M} = h(y)$ در این صورت معادله انتگرال سازی بصورت $\mu = \mu(y)$ دارد که از معادله $\frac{d\mu}{\mu} = \frac{My-Nx}{-M}dy$ بدست میاید.

مثال)

$$\left(\underset{M}{2xy^2+y}\right)dx+\left(\underset{N}{3x^2y+2x+2}\right)2y=0$$

$$My=4x+y+1 \quad . \quad Nx=6xy+2$$

$$\frac{My-Nx}{-M}=\frac{4x+y+1-6xy-2}{-(2xy^2+y)}=\frac{-(2xy+1)}{-y(2xy+1)}=\frac{1}{y}$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{1}{y}dy\rightarrow\int\frac{d\mu}{\mu}=\int\frac{1}{y}dy\rightarrow\ln\mu=\ln y\rightarrow\mu=y$$

$$(2xy^3+y^2)dx+(3x^2y^2+2xy+2y)dy=0$$

$$\begin{cases}\int(2xy^3+y^2)dx=x^2y^3+xy^3\\ \int(3x^2y^3+2xy+2y)dy=3x^2y^3+xy^2+y^2\end{cases}$$

$$\rightarrow x^2y^3+xy^2+y^2=C$$

$$\left(\underset{M}{2xy+2x+4}\right)dx+\left(\underset{N}{2x^2+2}\right)dy=0$$

$$Mx=2x \quad . \quad Ny=4x$$

$$\frac{My-Nx}{?}=\frac{2x-4x}{?}=\frac{-2x}{N}=\frac{-2x}{2x^2+2}=\frac{-x}{x^2+1}$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{x}{x^2+1}dx\rightarrow\int\frac{d\mu}{\mu}=\frac{-1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$\ln\mu=\frac{-1}{2}\ln(x^2+1)=\ln(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\left(\underset{M_1}{\frac{2xy+2x+4}{\sqrt{x^2+1}}}\right)dx+\left(\underset{N_1}{2\sqrt{2x^2+1}}\right)dy=0$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial y}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} \quad . \quad \frac{\partial N_1}{\partial x}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\int\left(\frac{2xy+2x+4}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=\int\left((y+1)\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=0$$

$$\int 2\sqrt{x^2+1}\,dy=2\sqrt{x^2+1}\,y$$

مسیرهای متعامد

مسئله دسته منحنی $G(x.y.c)=0$ مفروض است. مطلوب است دسته منحنی $H(x.y.c)=0$ بطوری که در نقاط تلاقی برهم عمود باشد.

$$y_1'y_2'=-1$$

$$G(x.y.c)=0\rightarrow f(x.y.c)=0$$

$$f\left(x.y.-\frac{1}{y}\right)=0\rightarrow H(x.y.c)=0$$

مثال) دسته متعامد روبرو را بیابید

$y = cx$

$$G(x.y.c) = y - cx = 0$$

$$\begin{cases} y = cx \\ y' = c \end{cases} \to y = y'x \xrightarrow{y'=-\frac{1}{y'}} y = \left(-\frac{1}{y'}\right)x \to y'y = -x$$

$$y'y = -x$$

$$\frac{dy}{dx}y = -x \to ydy = -xdx \to \int ydy = -\int xdx \to \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\to x^2 + y^2 = 2c$$

$xy = c$

$$\begin{cases} xy = c \\ y + xy' = 0 \end{cases}$$

$$y + xy' = 0 \qquad \left(y' = \left(-\frac{1}{y'}\right)\right)$$

$$y + x\left(-\frac{1}{y'}\right) = 0 \to yy' - x = 0$$

$$y\frac{dy}{dx} = x \to ydy = xdx \to \int ydy * \int xdx + C$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C \to y^2 - x^2 = 2C$$

معادله همگن

تابع $f(x.y)$ را نامند در صورتی که $f(tx.ty) = f(x.y)$

$$* \, G(x.y.y') = 0$$

مثال)

$$f(x.y) = \frac{x^2 + 3y^3}{5xy}$$

$$f(tx.ty) = \frac{(tx)^2 + 3(ty)^2}{5(tx)(ty)} = \frac{t^3(x^2 + 3y^2)}{t^2(5xy)}$$

معادله $y' = f(x.y)$ همگن نامند در صورتی که $f(x.y)$ همگن باشد

با تغییر متغیر $\begin{cases} y = xz \\ y' = z' + xz' \end{cases}$ معادله $y' = f(x.y)$ تبدیل به جداشدنی میشود.

مثال)

$$y' = \frac{x+5y}{x}$$

$$y = xz \quad . \quad y' = z + xz'$$

$$z + xz' = \frac{x+5xz}{x} \to z + xz' = 1 + 5z$$

$$x\frac{dz}{dx} = 1 + 4z \to \frac{dz}{4z+1} = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{4dz}{4z+1} = \int \frac{dx}{x} + \ln C$$

$$\frac{1}{4}\ln(4z+1) = \ln x + \ln C$$

$$\ln(4z+1)^{\frac{1}{4}} = \ln Cx \to \left(4\frac{y}{x}+1\right)^{\frac{1}{4}} = Cx$$

$$4\frac{y}{x} + 1 = C^4x^4 \to 4y + x = C^4x^5$$

"فصل دوم"

معادلات مرتبه دوم خطی همگن

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$

نکته: اگر صفر باشد همگن و اگر یک باشد غیر همگن ، یعنی y و x را در f ضرب کنیم و تغییر نکند همگن است.

دو تابع f(x) و g(x) را دربازه [a,b] مستقل خطی نامند در صورتی که $f(x) \neq \lambda\ g(x)$ در غیراین صورت دو تابع را وابسته خطی نامند.

مثال) دو تابع $f(x) = e^{2x}$ و $g(x) = 3^{3x}$ مستقل خطی است. در صورتی که $f(x) \neq \lambda\ g(x)$ در غیر اینصورت وابسته خطی نامند.

$e^{3x} \neq \lambda\ e^{2x}$
مستقل خطی

$\frac{e^{3x}}{e^{2x}} = e^{x} \neq \lambda$ استقراء دارد

زیرا g(x)=2f(x) پس f(x) و g(x) وابسته خطی است

تعریف: اگر f(x) و g(x) دو تابع در [a,b] باشند ، رونکستین f(x) و g(x) عبارت است از

$W\big(f(x).g(x)\big) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - g(x)f'(x)$

مثال) $W(e^{3x}.e^{2x})$

$W(e^{3x}.e^{2x}) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{2x} \\ 3e^{3x} & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{5x} - 3e^{5x} = -e^{5x} \neq 0$

$(e^{u})' = u'e^{u}$

قضیه: فرض کنید که دو تابع $y_1(x)$ و $y_2(x)$ جوابهای $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ باشد. در اینصورت y_1 و y'' مستقل خطی اند اگر و فقط اگر $W(y_1 . y_2) = 0$

مثال) دو تابع $y_1 = e^x$ و $y_1 = e^{4x}$ جوابهای معادله $y'' - 5y' + 4y = 0$ هستند.

$$\rightarrow y_1 = e^x . y_1' = e^x . y_1'' = e^x$$
$$e^x - 5e^x + 4e^x = 0$$
$$\rightarrow y_2 = e^{4x} . y_2' = e^{4x} . y_2'' = e^{4x}$$
$$16e^{4x} - 20e^{4x} + 4e^{4x} = 0$$
$$W(y_1 . y_2) = \begin{vmatrix} e^{4x} & e^x \\ 4e^{4x} & e^x \end{vmatrix} = e^{5x} - 4e^{5x} = -3e^{5x} \neq 0$$

y_1 و y_2 مستقل خطی است

قضیه: اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب مستقل خطی معادله $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ باشند، آنگاه $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$ جواب عمومی $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ است.

مثال) جواب عمومی $y'' - 5y' + 3y = 0$ عبارت است از

$$y_h - c_1e^x + c_2e^{4x}$$

با توجه به مثال قبل

مثال) نشان دهید که $y_2 = x^3$ و $y_1 = x^2$ جوابهای مستقل خطی $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$ میباشد سپس جوابهای عمومی را بیابید.

$$2x^2 - 8x^2 + 6x^2 = 0$$
$$y_2 = x^3 . y_2' = 3x^2 . y_2'' = 6x$$
$$6x^3 - 12x^3 + 6x^3$$
$$W = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^4 - 2x^4 = x^4 \neq 0$$

مستقل خطی است زیرا

$y_h = c_1x^2 + c_2x^3$ جواب عمومی است

معادلات دیفرانسیل خطی همگن مرتبه دوم

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$

$y_h = c_1y_1 + c_2y_2$

پیدا کردن جواب دوم y_2 با استفاده از y_1

$y_2 = Vy_1$

$$V = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx}\, dx$$

مثال) $y'' - 7y' + 12y = 0 \;\;.\;\; y_1 = e^{3x}$

$P(x) = -7$

$$\int P(x)dx = \mathcal{F}7dx = -7x$$

$$V = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx} dx = \int \frac{1}{(e^{3x})^2 = e^{6x}}\; e^{-7x}dx = \int e^{x}dx = e^{x}$$

$y_2 = Vy_1 = e^{x}e^{3x} = e^{4x}$

$y_h = c_1e^{3x} + c_2e^{4x}$

مثال) $x^2y'' - 9xy' + 21y = 0 \;\;.\;\; y_1 = x^7$

$lne^{\propto} = \propto \rightarrow e^{ln\propto} = \propto$

$$P(x) = \frac{-9x}{x^2} = -\frac{9}{x}$$

$$\int P(x)dx = \int \frac{9}{x}dx = -9lnx$$

$$V = \int \left(\frac{1}{y_1^2}\right)^{-\int P(x)dx} dx = \int \frac{1}{x^{14}} e^{9lnx}dx = \int \frac{1}{x^{14}} e^{lnx^9}\, dx = \int \frac{1}{x^{14}} x^9dx$$

$$= \int \frac{dx}{x^5} \rightarrow V = \int x^5dx \rightarrow V = \frac{x^{-4}}{-4}$$

$$y_2 = Vy_1 \frac{x^{-4}}{-4} x^7 = \frac{1}{4}x^3$$

$$y_h = c_1y_1 + c_2y_2 \rightarrow y_h = c_1x^7 - \frac{1}{4}c_2x^3 = c_1x^7 + c_2x^3$$

معادله دیفرانسیل خطی همگن مرتبه دوم با ضرائب ثابت

$$y'' + ay' + by = 0 \quad . \quad a.b \in (-\infty.+\infty)$$

$$\left(\text{تابع نمایی}\right)\ y = e^{mx} \rightarrow \left(1\ \text{مشتق}\right)\ y' = me^{mx}.\left(2\ \text{مشتق}\right)\ y'' = m^2e^{mx}$$

$$m^2e^{mx} + ame^{mx} + be^{mx} = 0$$

$$e^{mx}(m^2 + am + b) = 0 \rightarrow \emptyset(m) = m^2 + am + b = 0$$ معادله مشخصه

$$y = e^{mx}.y' = me^{mx}.y'' = m^2e^{mx} = 0$$

1. $\Delta = a^2 - 4b > 0 \qquad ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

   $m_2.m_1$ دو جواب حقیقی متمایز معادله میباشند

   $y_h = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}$

2. $\Delta = a^2 - 4b = 0$

   $m_1 = m_2 = -\frac{a}{2}$

   $y_1 = e^{-\frac{a}{2}x} \qquad y_2 = Vy_1$

   $V = x \rightarrow y_2 = xe^{-\frac{a}{2}x}$

   $y_h = c_1e^{-\frac{a}{2}x} + c_2e^{-\frac{a}{2}x}$

مثال) $y'' - 5y' + 6y = 0$

$$m^2 - 5m + 6 = 0$$
$$(m-2)(m-3) = 0$$
$$m = 2.3$$
$$y_h = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$$

مثال) $y'' - 6y' + 9y = 0$

$$m^2 - 6m + 9 = 0$$
$$(m-3)^2 = 0$$
$$m = 3$$

$$y_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^{3x}$$

3. $\Delta = a^2 - 4b < 0$

$$m = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \qquad i = \sqrt{(-1)}$$

$$m = \frac{-a \pm \sqrt{(-1)(4b - a^2)}}{2}$$

$$m = \frac{-a \pm i\sqrt{4b - a^2}}{2}$$

$$m = \propto \pm \beta$$

$$y_h = e^{\propto x}(c_1 cos\beta x + c_2 sin\beta x)$$

مثال) $y'' - 4y' + 13y = 0$

$$m^2 - 4m + 13 = 0$$

$$m = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 16}{2} = 2 + 3i$$

$$y_h = e^{3x}(c_1 cos3x + c_2 sin3x)$$

مثال) $y'' + 9y = 0$

$$m^2 + 9 = 0$$

$$m^2 = -9$$

$$m = \pm\sqrt{-9}$$

$$m = \pm i3$$

$$\propto = 0 \ . \ \beta = 3$$

$$y_h = (c_1 cos3 + c_2 sin3x)$$

معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن

معادله کوشی-اویلر (هم بعد)

$$x^2 y'' + axy' + by = 0$$

باتغییر متغیر

$$X = e^Z \leftrightarrow lnx$$

$$\frac{d^2y}{dZ^2} + (a-1)\frac{dy}{dZ} + by = 0$$

مثال) $x = e^Z \qquad x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$

$$\frac{d^2y}{dZ^2}+(-4-1)\frac{dy}{dZ}+6y=0$$
$$m^2-5m+6=0$$
$$(m-2)(m-3)=0$$
$$m=2.3$$
$$y_h=c_1e^{2Z}+c_2e^{2Z}$$
$$y_h=c_1(e^Z)^2+c_2(e^Z)^3\rightarrow y_h=c_1x^2+c_1x^3$$

مثال) $x^2y''-5xy'+9y=0 \quad x=e^Z.Z=lnx$

$$\frac{d^2y}{dZ^2}+(-5-1)\frac{dy}{dZ}+9y=0$$
$$m^2-6m+9=0$$
$$(m-3)(m-3)=0\rightarrow(m-3)^2=0$$
$$m=3$$
$$y_h=c_1e^{3Z}+c_2e^{3Z}$$
$$y_h=c_1(e^Z)^3+C_2(ez)^3\rightarrow y_h=c_1x^3+c_2(lnx)x^3$$

مثال) $x^2y''+5xy'+13y=0$

$$\frac{d^2y}{dZ^2}+(5-1)\frac{dy}{dZ}+13=0$$
$$m^2+4m+13=0$$
$$m=\frac{-4\pm\sqrt{16-52}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{-4\pm16}{2}=-2\pm3i$$
$$y_h=e^{-2Z}(c_1cos3Z+c_2sin3Z)$$
$$y_h=x^{-2}(c_1\cos(3inx)+c_2\sin(3lnx))$$

مثال) $x^2y''-xy'+3y=0$

$$\frac{d^2y}{dZ^2}(-1-1)\frac{dy}{dZ}+3y=0$$
$$m^2-2m+3=0$$
$$m=\frac{-2\pm\sqrt{4-12}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-8}}{2}=\frac{2\pm i2\sqrt{2}}{2}\rightarrow m=1+i\sqrt{2}$$
$$y_h=e^Z\left(c_1cos\sqrt{2}z+c_2\sin\left(\sqrt{2}inx\right)\right)$$

معادله خطی همگن با مرتبه بالاتر و ضرائب ثابت

$$y^{(4)}+ay^{(3)}+by^{(2)}+cy^{(1)}+dy=0$$

معادله مشخصه $m^4 + am^3 + bm^2 + cm + d = 0$

با محاسبه ریشه ها بر طبق فرمول معادله مرتبه دو جواب ها را مینویسیم

مثال) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

$$\emptyset(m) = m^3 - 6m^2 + 11m - 6 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} m^3 - 6m^2 + 11m - 6 & m - 1 \\ \underline{-m^3 - m^2 \qquad\qquad} & m^2 - 5m + 6 \\ -5m^2 + 11m - 6 & \\ \underline{+5m^2 - 5m - 6} & \\ 6m - 6 & \\ \underline{-6m + 6} & \\ 0 & \end{array}$$

$$m^3 - 6m^2 + 11m - 6 \to (m-1)(m^2 - 5m + 6)$$
$$\to (m-1)(m-2)(m-3)$$
$$m = 1.2.3$$
$$y_h = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$$

مثال) $y^{(4)} - 2y^{(3)} + y = 0$

$$\emptyset(m) = m^4 - 2m^3 + 1 = 0$$
$$t = m^2$$
$$t^2 - 2t + 1 = 0$$
$$(t^2 - 1)^2 = 0$$
$$(-1.-1.1.1)$$
$$y_h = c_1e^{-x} + c_2e^{-x} + c_3e^x + c_4e^x$$

معادله دیفرانسیل مرتبه دو خطی همگن

$(*)\ y" + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$

$(**)\ y" + P(x)y' + Q(x)y = 0$

$$y_h = c_1y_1 + c_2y_2\ .\ w(y_1.y_2) \neq 0$$

قضیه: اگر y_h جواب عمومی (*) و y_p یک جواب خصوصی (*) باشد، در اینصورت $y = y_h + y_p$ جواب عمومی (*) است.

مثال) $y" - 11y' + 28y = 5e^{2x}$

مرتبه دو ناهمگن است

$$y" - 11y' + 28y = 0$$

معادله مشخصه تشکیل میدهیم

$$m^2 - 11m + 28 = 0$$

$$(m-4)(m+7) = 0$$

$$m = 4.7$$

$$y_h = c_1e^{4x} + c_2e^{7x}$$

$$y_p = \frac{1}{2}e^{2x}$$ جواب خصوصی

$$\mathrm{y} = c_1e^{4x} + c_2e^{7x} + \frac{1}{2}e^{2x}$$ جواب عمومی

جواب خصوصی

۱. روش لاگرانژ (تغییر پارامتر)

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2$$

$$u_1 = -\int \frac{y_2R}{w}\,dx$$

$$u_1 = -\int \frac{y_1R}{w}\,dx$$

مثال) $y_h = c_1e^{4x} + c_2e^{7x}$

$$w = \begin{vmatrix} e^{4x} & e^{7x} \\ 4e^{4x} & 7e^{7x} \end{vmatrix} = 3e^{11x}$$

$$u_1 = -\int \frac{y_2R}{w}\,dx = -\int \frac{e^{7x}5e^{2x}}{3e^{11x}}dx$$

$$u_1 = -\frac{5}{3}\int e^{-4x}dx = \frac{5}{6}e^{-2x}$$

$$u_2\int \frac{y_1R}{2}\,dx = \int \frac{e^{4x}5e^{2x}}{3e^{11x}}\,dx = \frac{5}{3}\int e^{-5x}\,dx$$

$$u_2 = \frac{-1}{3}e^{-5x}$$

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 = \frac{5}{6}e^{-2x}e^{4x} - \frac{1}{3}e^{-5x}e^{7x}$$

$$y_p = \frac{5}{6}e^{2x} - \frac{1}{3}e^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$y'' + y = \frac{tanx}{R_2+1}$$

$$y'' + y = 0$$

$$m^2 + 1 = 0 \quad m = \sqrt{\pm 1} \qquad m = \pm!$$

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$w = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

$$u_1 = -\int \sin x \tan x \, dx = -\int \frac{sin^2x}{\cos x} \, dx = \int \frac{cos^2x - 1}{\cos x} \, dx$$

$$= \int (\cos x - \frac{1}{\cos x}) \, dx$$

$$u_1 = \sin x - \ln(\sec x + \tan x)$$

$$u_2 = \int \cos x \tan x \, dx = \int \sin x \, dx = -\cos x$$

$$u_2 = u_1y_1 + u_2y_2 = (\sin x - \ln(\sec x + \tan x))dx - \cos x + \tan x$$

$$y_p = -\cos x \ln(\sec x + \tan x)$$

جواب عمومی

$$y = y_h + y_p$$

مثال) $y'' - 5y' + 6y = 4e^x$

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

$$m^2 - 5m + 6 = 0 \quad (m-2)(m-3) = 0 \qquad m = 2.3$$

$$y_h = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$$

$$w = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = e^{5x}$$

$$u_1 = -\int \frac{e^{3x}4e^x}{5^x} \, dx = \int -4e^x \, dx = 4e^{-x}$$

$$u_2 = \int \frac{e^{2x}4e^x}{5^x} \, dx = \int 4e^{-2x}e^{3x}$$

$$y_p = 4e^{-x}e^{3x} - 2e^{-2x}e^{3x}$$

$$y_p = 2e^x$$

$$y = y_h + y_p$$

معادل دیفرانسیل مرتبه دو ناهمگن

$(*) y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$

۲. حالت خاص (روش ضرائب نامعین)

$(**) y'' + ay' + by = R(x)$

i. $R(x) \propto e^{\gamma x}$

ii. $\propto \sin\gamma x + \beta\cos\gamma x$ جزء امتحان نیست

iii. $R(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$

$(***) y'' + ay' + by = 0$

$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$

a) چنانچه y_p و y_h جمله مشترک داشته باشند y_p را در یک x ضرب میکنیم.

$$y'' + ay' + by = \propto e^{\gamma x}$$

$$y_p = Ae^{\gamma x}$$

مثال) $y'' - 5y' + 6y = 3e^x$

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

$$m^2 - 5m + 6 = 0$$

$$(m-2)(m-3) = 0$$

$$m = 2.3$$

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

$$y_p = Ae^x \rightarrow y' = y'' = Ae^x$$

$$Ae^x - 5e^x + 6e^x = 3e^x$$

$$2Ae^x = 3e^x$$

$$2A = 3 \rightarrow A = \frac{3}{2}$$

$$y_p = \frac{3}{2}e^x$$

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \frac{3}{2}e^x$$

$$y'' - 7y' + 12y = 5e^{2x}$$

$$y'' - 7y' + 12y = 0$$

$$m^2 - 7m + 12 = 0$$

$$(m-3)(m-4) = 0$$

$$m = 3.4$$

$$y_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x}$$

$$y_p = Ae^{2x}$$

$$y'_p = 2Ae^{2x}$$

$$y'' = 4Ae^{2x}$$

$$4Ae^{2x} - 14Ae^{2x} + 12Ae^{2x} = 5e^{2x} \to 2Ae^{2x} = 5e^{2x} \to A = \frac{5}{2}.y_p = \frac{5}{2}e^{2x}$$

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x} + \frac{5}{2}e^{2x}$$

6)

$$y'' + ay' + by = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$y_p = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1 + A_0$$

مثال) $y'' - 6y' + 13y = 2x + 3$

$$y'' - 6y' + 13y = 0$$
$$m^2 - 6m + 13 = 0$$
$$m = \frac{6 \pm \sqrt{36-52}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm 4!}{2} = 3 + 2!$$
$$y_h = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$
$$y_p = Ax + B$$
$$y'_p = A_1 \qquad y''_p = 0$$
$$-6A + 13(Ax + B) = 2x + 3$$
$$\begin{cases} 13A = 2 \to A = \dfrac{2}{13} \\ -6A + 13B = 3 \end{cases}$$
$$B = \frac{1}{13}(3 + 6A) = \frac{1}{13}\left(3 + \frac{12}{3}\right)$$
$$B = \frac{51}{169} \to y_p = \frac{2}{13}x + \frac{51}{169}$$

$$y = y_h + y_p = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + \frac{2}{13}x + \frac{51}{169}$$

مثال) $y'' - 4y' = 5x$

$$y'' - 4y' = 0$$
$$m^2 - 4m = 0$$
$$m(m-4) = 0$$
$$m = 0.4$$
$$y_h = c_1 e^{0x} + c_2 e^{4x}$$

عدد مشترک دارند $\begin{cases} y_h = c_1 + c_2 e^{4x} \\ y_p = Ax + B \end{cases}$

$$y_p = x(Ax + b) \to y_p = Ax^2 + Bx \begin{cases} y'_p = 2Ax + B \\ y''_p = 2A \end{cases}$$

$$2A - 4(2Ax + B) = 5x$$

$$\begin{cases} -8A = 5 \Rightarrow A = -\frac{5}{8} \\ 2A - 4B = 0 \Rightarrow B = \frac{1}{2} \ .\ A = -\frac{5}{16} \end{cases}$$

$$y_p = -\frac{5}{8}x - \frac{5}{16}$$

$$y = y_h + y_p = c_1 + c_2 e^{4x} - \frac{5}{8}x - \frac{5}{16}$$

"فصل سوم"

تبدیل لاپلاس

تبدیل لاپلاس توابع مقدماتی	
$F(s)=Z\{f(t)\}$	$f(t)=Z^{-1}\{F(s)\}$
$1'.\frac{1}{s}\ .s>0$	۱. 1
$2'.\frac{1}{s-a}\ .s>a$	۲. e^{at}
$3'.\frac{n!}{s^{n+1}}\ .s>0$	۳. t^n، n عدد صحیح مثبت
$4'.\frac{F(P+1)}{S^{(P+1)}}\ .s>0$	۴. $P>-1.t^P$
$5'.\frac{a}{s^2+a^2}\ .s>0$	۵. $\sin at$
$6'.\frac{s}{s^2+a^2}\ .s>0$	۶. $\cos at$
$7'.\frac{a}{s^2-a^2}\ .s>\lvert a\rvert$	۷. $\sinh at$
$8'.\frac{s}{s^2-a^2}\ .s>\lvert a\rvert$	۸. $\cosh at$
$9'.\frac{b}{(s-a)^2+b^2}\ .s>a$	۹. $e^{at}\sin bt$
$10'.\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\ .s>a$	۱۰. $e^{at}\cos bt$
$11'.\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\ .s>a$	۱۱. t^ne^{at}، n عدد صحیح مثبت
$12'.\frac{e-cs}{s}\ .s>0$	۱۲. $u_c(t)$
$13'.e^{-cs}F(s)$	۱۳. $u_c(t)f(t-c)$

۱۴.	$e^{ct}f(t)$	$14'.F(s-c)$
۱۵.	$f(ct)$	$15'.\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)\ .c>0$
۱۶.	$\int_0^t f(t-r)g(r)dr$	$16'.F(s)G(s)$
۱۷.	$\delta(t-c)$	$17'.e^{-cs}$
۱۸.	$f^{(n)}(t)$	$18'.s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$
۱۹.	$(-t)^n(t)$	$19'.F^{(n)}(s)$
۲۰.	$\int_s^L f(Z)fz$	$20'.\frac{f(t)}{t}$

یک انتگرال به این صورت است که:

$$L[f(t)]=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt=F(s)$$

$t>0\ \ .\ \ S>0$

مثال) $F(t)=1$

$$L[f(t)]=\int_0^{\infty}e^{-st}\,dt=\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^{\infty}=\left[\frac{1}{-se^{st}}\right]_0^{\infty}=0-\left(-\frac{1}{s}\right)=\frac{1}{s}$$

فرمول انتگرال

جدول لاپلاس (تکنیک دور زدن)

$f(t)$	$F(s)$
$f'(t)$	$\mathbf{SF(s)-F(0)}$
$f''(t)$	$\mathbf{s^2F(0)-sf'(0)-f''(0)}$

مثال) $y' + 2y = 3 \qquad y(0) = 2$

با این فرض که مساله حل شده و y بدست آمده

$$d[y] = F(s) \Leftrightarrow y = d^{-1}[F(s)]$$

$$L[y' + 2y] = L[3]$$

$$L[y'] + 2L[y] = 3l[1]$$

$$SF(s) - y(0) + 2F(s) = \frac{3}{S}$$

$$(S+2)F(s) = \frac{3}{2} + 2$$

$$F(S) = \frac{3}{S(S+2)} + \frac{2}{(S+2)}$$

جزء به جزء کسرهای ساده

$$F(S) = \frac{\frac{3}{2}}{S} + \frac{-\frac{3}{2}}{S+2} + \frac{2}{S+2}$$

$$\frac{3}{S(S+2)} = \frac{A}{S} + \frac{B}{S+2} = \frac{A - S + 2A + B}{S(S+2)}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A = 3 \rightarrow A = \frac{3}{2} \ . \ B = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$F(S) = \frac{3}{2}\frac{1}{S} - \frac{3}{2}\frac{1}{S+2} + 2\frac{1}{S+2}$$

$$y(t) = d^{-1}[F(S)] = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}e^{-2t} + 2e^{-2t}$$

$$y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t}$$

مثال) $y'' + y = 0 \qquad y(0) = 0 \, . \, y'(0) = 1$

با فرض مساله حل شده و y بدست آمده

$$d[y] = F(0)$$

$$[y'' + y] = d[0]$$

$$L[y''] + L[y] = 0$$

$$S^2F(s) - sy(0) - y'(0) + F(s) = 0$$

$$(s^2 + 1)F(s) = 1$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$y = L^{-1}[F(s)] = sint$$

مثال) $y'' + 4y = 0 \qquad y(0) = 1 \,.\, y'(0) = 1$

با فرض مساله حل شده و y بدست آمده

$$L[y'' + 4y] = L[0]$$

$$L[y''] + 4L[y] = 0$$

$$S^2F(s) - sy(0) - y'(0) + 4F(s) = 0$$

$$(s^2 + 4)F(s) = s + 1$$

$$F(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 2}$$

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{1}{s^2 + 4}$$

$$y = L^{-1}[F(s)] = \cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t$$

قضیه:

$$L[tf(t)] = -F'(s)$$

$$L[t^2f(t)] = F''(s)$$

مثال) $L[t\cos t] = ?$

$$\cos at = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$L[\cos t] = \frac{s}{s^2 + 1}$$

$$L[t\cos t] = \left(\frac{s}{s^2+1}\right)' = \frac{s^2-2s^2}{(s^2+1)^2} = \frac{1-s^2}{(s^2+1)^2} = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$

مثال) $L[t\sin 3t] = ?$

$$L[t\sin 3t] = \frac{3}{s^2+9} = -\left(\frac{3}{s^2+9}\right)' = \frac{-(2s)3}{(s^2+9)^2} = \frac{6s}{(s^2+9)^2}$$

$L[e^{ct}f(t)] = F(s-c)$

مثال) $L[e^{3t}\cos 2t] = ?$

$$L[\cos 2t] = \frac{s}{s^2+4}$$

$F(s)$

$$L[e^{3t}\cos 2t] = \frac{s-3}{(s-3)^2+4}$$

مثال) $L^{-1}\left[\frac{s}{s^2-6s+34}\right] = ?$

$$H(s) = \frac{s}{s^2-6s+34} = \frac{s}{(s-3)^2-5^2} = \frac{s-3+3}{(s^2-3)^2+5}$$

$$= \frac{s-3}{(s^2-3)^2+5} + \frac{3}{(s-3)^2+5^2}$$

$$h(t) = L^{-1}[H(s)] = e^{3t}\cos 5t + \frac{3}{5}e^{3t}\sin 5t$$

$a^2-2ab+b^2-b^{-2}$

$\frac{3}{(s-3)^2+5^2} \to \frac{3}{5}\frac{5}{(s-3)^2+5^2}$

مربع کامل $(s^2-6s) = (s-3)^2$

مثال) $L^{-1}\left[\frac{s}{s^2-4s+13}\right] = ?$

$$H(s) = \frac{s}{s^2-4s+13} = \frac{s}{(s^2-2)^2+3^2} = \frac{s-2+2}{(s-2)^2+3}$$

$$= \frac{s-2}{(s-2)^2+3^2} + \frac{2}{(s-2)^2+3^2}$$

$\frac{2}{(s-2)^2+3^2} \to \frac{2}{3}\frac{3}{(s^2-2)^2+3^2}$

$$h(t) = L^{-1}[H(s)] = e^{3t}\cos 3t + \frac{2}{3}e^{2t}\sin 3t$$

تبدیل به کسر ساده

مثال) $L^{-1}\left[\frac{1}{s^2-5s+6}\right]=?$

$$H(s)=\frac{1}{s^2-5s+6}=\frac{1}{(s-2)(s-3)}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{s-3}$$
$$=\frac{As-3A+Bs-2B}{(s-2)(s-3)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \leftarrow \text{ضرائب} \\ -3A-2B=1 \leftarrow \text{مقادیر مثبت} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -3A-2B=1 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} -A=1 \\ A=1 \\ B=1 \end{matrix}$$

$$e^{at}=\frac{1}{s-a}$$

$$H(s)=\frac{-1}{s-2}+\frac{1}{s-3}$$
$$h(t)=L^{-1}[H(s)]=-e^{2t}+e^{3t}$$

مثال) $L^{-1}\left[\frac{s+1}{s^3+s}\right]=?$

$$H(s)=\frac{s+1}{s(s^2+1)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+c}{s^2+1}=\frac{As^2+A+Bs^2+cs}{s(s^2+1)}\rightarrow\begin{cases} A+B=0 \\ c=1 \\ A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

$$H(s)=\frac{1}{s}+\frac{-s+1}{s^2+1}\rightarrow H(s)=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1}$$
$$h(t)=L^{-1}[H(s)]=1-cist+sint$$

مثال) (سوال امتحان ترم قبل) $L^{-1}\left[\frac{1}{s^3-3s^2+2s}\right]=?$

$$=\frac{1}{s(s^2-3s+2)}=\frac{1}{s(s-2)(s-1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-2}+\frac{c}{s-1}$$
$$=\frac{As^2-3As+2A+Bs^2-Bs+cs^2-2cs}{s(s-2)(s-1)}$$

$$\begin{cases} A+B=0\rightarrow\frac{1}{2}+B=0\rightarrow B=-\frac{1}{2} \\ -3A-B-2C=0\rightarrow-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2c\rightarrow c=-\frac{1}{2} \\ 2A=1\rightarrow A=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$A*(s^2-2)=\begin{cases}(s-2)\\(s-1)\end{cases}$$
$$B*(s^2-1)=\begin{cases}(s)\\(s-1)\end{cases}$$
$$c*(s^2-2)=\begin{cases}(s)\\(s-1)\end{cases}$$

$$H(s) = \frac{\frac{1}{2}}{s} + \frac{-\frac{1}{2}}{s-2} + \frac{-\frac{1}{2}}{s-1}$$

$$h(t) = L^{-1}[H(s)] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{t}$$

مهمپیچش**

پیچش $f(t)$ با $g(t)$ عبارت است از $(f * g)(t) = \int_0^t f(t-z)g(z)dz$

قضیه: تبدیل پیچش $L[(f * g)(t)] = F(s)G(s)$

مثال) $\sin t * \cos t = ?$

$$= \int_0^t \sin(t-z)\cos z\, dz$$

مثال) $L[\sin t * \cos t] = ?$

$$= \frac{1}{s^2+1} * \frac{s}{s^2+1} = \frac{s}{(s^2+1)^2}$$

مثال) $y' = e^t + \int_0^t (t-z)\, e^z dz = ? \quad y(0) = 0$

$$y' = e^t + t * e^t$$

$$L[y'] = L[e^t] + L[t * e^t]$$

$$sF(s) - y(0) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s^2} * \frac{1}{s-1}$$

$$F(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \frac{1}{s^3(s-1)}$$

$$F(s)=\frac{-1}{s}+\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s^3(s-1)}\rightarrow\frac{1}{(s-0)^3(s-1)^1}$$
$$=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s^3}+\frac{D}{s-1}$$
$$=\frac{As^3-As^2+Bs^2-Bs+Cs-C+Ds^3}{s^3(s-1)}$$
$$\rightarrow\begin{cases}A+D=0\rightarrow D=1\\-A+B=0\rightarrow A=-1\\-B+C=0\rightarrow B=-1\\-C=1\rightarrow C=-1\end{cases}$$

$$F(s)=\frac{-1}{s}+\frac{1}{s-1}+\frac{-1}{s}+\frac{-1}{s^2}+\frac{-1}{s^3}+\frac{1}{s-1}$$
$$\rightarrow\frac{-2}{s}+\frac{2}{s-1}+\frac{-1}{s^2}+\frac{-1}{s^3}$$

$$y(t)=L^{-1}[F(s)]=-2+2e^t-t-\frac{1}{2}t^2$$

$f'(t)=sF(0)-F(0)$

مثال) $y'=e^t+\int_0^t e^z dz\ \ .\ \ y(0)=0$

$$l[y']=L[e^t]+L[1*e^t]$$
$$sF(s)-y(0)=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s}*\frac{1}{s-1}$$
$$F(s)=\frac{1}{s(s-1)}+\frac{1}{s^2(s-1)}$$
$$F(s)=\frac{-1}{s}+\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s^2(s-1)}$$
$$=-\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}+\frac{-1}{s}+\frac{-1}{s^2}+\frac{1}{s-1}$$
$$\rightarrow\frac{-1}{s}+\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s^2(s-1)}$$

$$\begin{cases}\frac{1}{s^2(s-1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s-1}=\frac{As^2-As+Bs-B+Cs^2}{s^2(s-1)}\\ \begin{cases}A+C=0\rightarrow C=1\\-A+B=0\rightarrow A=-1\\-B=1\rightarrow B=-1\end{cases}\end{cases}$$

$$y=L^{-1}[F(s)]=-2+2e^t-t$$

راه دوم

$$y' = e^t + \int_0^t e^z dz \quad . \quad y(0) = 0$$

$$y' = e^t + [e^z]_0^t \to y' = e^t + e^t - 1 = 2e^t - 1$$

$$y = \int (2e^t - 1)dt + c \to 2e^t - t + c$$

$$t = 0 \quad . \quad y = 0$$

$$0 - 2 + c \to c - 2$$

$$y = 2e^t - t - 2$$

مثال) $y(0) = 0 \quad . \quad y'(0) = 1 \quad y" = 8y' + 25y = 0$

$$L[y] = F(s)$$

$$L[y"] = -8L[y'] + 25L[y] = L[0]$$

$$\to \begin{cases} -8L[y'] = s^2F(s) - sy(0) - y'(0) \\ +25L[y] = -8\big(sF(s) - y(0)\big) \end{cases}$$

$$\to s^2F(s) - sy(0) - y'(0) - 8\big(sF(s) - y(0)\big) + 25F(s) = 0$$

$f"(t) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$e^{ct}f(t) = F(s = c)$

$$(s^2 - 8s + 25)F(s) = 1$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2 - 8s + 25} \to \frac{1}{(s-4)^2 + 3^2} = \frac{1}{s^2 + 3^2} \to \frac{1}{3}\sin 3t$$

$$y = L^{-1}[F(s)] = e^{4t}\frac{1}{3}\sin 3t$$

مثال) $y(0) = 0 \quad . \quad y'(0) = 2 \quad y" - 10y' + 41y = 0$

$$L[y"] - 10L[y'] + 41L[y] = 0$$

$$s^2F(s) - sy(0) - 10\big(sF(s)\big) - y(0) + 41F(s) = 0$$

$$(s^2 - 10s + 41)F(s) = 2$$

$$F(s) = \frac{2}{s^2 - 10s + 41} = \frac{1}{(s-5)^2 + 4^2} \to \frac{1}{s^2 + 4^2} \xrightarrow{L^{-1}} \frac{1}{4}\sin 4t$$

$$y = L^{-1}[F(s)] = 2e^{5t}\frac{1}{4}\sin 4t$$

مثال) (سوال آخر امتحان ترم قبل) $(x-1)y'' - xy' + y = 0$

$$y_1 = x$$

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$y_2 = V y_1$$

$$V = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx} dx$$

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0 \to y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 0$$

$$P(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$-\int P(x)dx = \int \frac{x}{x-1}dx = \int \frac{(x-1)+1}{x-1}dx$$

$$= \int \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)dx = x + \ln(x-1)$$

$$V = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx} dx = \int \frac{1}{x^2} e^{x+\ln(x-1)} dx = \int \frac{1}{x^2} e^x e^{\ln(x-1)} dx$$

$$= \int \frac{e^x}{x^2}(x-1)dx = \int \frac{e^x(x-1)}{x^2}dx = \frac{e^x}{x}$$

$$\int \frac{xe^x - e^x}{x^2}dx = \begin{cases} y_2 = vy_1 = \frac{e^x}{x}x = e^x \\ y_h = c_1 x + c_2 e^x \end{cases}$$